ZMMiK Laboratorium 4 - Statyczna Analiza Kompozytu Warstwowego

1 Cel laboratorium

W ramach ćwiczenia laboratoryjnego analizie poddana zostanie płyta kompozytowa o wymiarach a = 600 mm, b = 400 mm, H = 8 mm. Płyta obciążona jest równomiernie rozłożonym ciśnieniem q = 0, 1 MPa. Zadanie zostanie rozwiązane przy pomocy dwóch modeli: warstwowego oraz trójwymiarowego.



Rysunek 1: Schemat modelowanej geometrii.

Przyjęto następujące reprezentatywne właściwości dla pojedynczej warstwy kompozytu jednokierunkowego na osnowie epoksydowej wzmocnionego włóknem węglowym. Właściwości inżynierskie w układzie osi materiałowych warstwy (1-2-3):

$E_1 = 140 \text{ GPa} = 140000 \text{ MPa}$	(Moduł Younga w kierunku włókien)
$E_2 = 10 \text{ GPa} = 10000 \text{ MPa}$	(Moduł Younga poprzecznie do włókien)
$E_3 = 10 \text{ GPa} = 10000 \text{ MPa}$	(Moduł Younga w kierunku grubości)
$\nu_{12} = 0,30$	(Główny współczynnik Poissona)
$\nu_{13} = 0,30$	(Współczynnik Poissona)
$\nu_{23} = 0,40$	(Współczynnik Poissona)
$G_{12} = 5 \text{ GPa} = 5000 \text{ MPa}$	(Moduł sztywności postaciowej w płaszczyźnie 1-2)
$G_{13} = 5 \text{ GPa} = 5000 \text{ MPa}$	(Moduł sztywności postaciowej w płaszczyźnie 1-3)
$G_{23} = 3,5 \text{ GPa} = 3500 \text{ MPa}$	(Moduł sztywności postaciowej w płaszczyźnie 2-3)

Dla uproszczonych obliczeń w ramach Klasycznej Teorii Laminatów (KTL), przy założeniu płaskiego stanu naprężenia w każdej warstwie, kluczowe są właściwości w płaszczyźnie: $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$. Pozostałe właściwości ($E_3, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{13}, G_{23}$) są istotne dla pełnej analizy 3D lub teorii płyt wyższego rzędu uwzględniających odkształcenia postaciowe poprzeczne.

1.1 Rozwiązanie analityczne

Punktem wyjścia do uzyskania rozwiązania analitycznego jest równanie różniczkowe ugięcia w przypadku płyty specjalnie ortotropowej:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q$$
(1)

Należy zwrócić tutaj uwagę, że zastosowanie tego równania dla analizowanego laminatu stanowi znaczące uproszczenie. Chociaż każda warstwa jest ortotropowa ($E_1 \neq E_2$), ułożenie warstw pod kątami prowadzi do anizotropowych właściwości giętnych całego laminatu (niezerowe współczynniki D_{16} i D_{26} w macierzy sztywności giętnej). Równanie 1 jest ścisłe dla płyt specjalnie ortotropowych, dla których $D_{16} = D_{26} = 0$. W analizowanym przypadku laminatu anizotropowego współczynniki te są różne od zera, stąd zastosowanie tego równania jest przybliżeniem. W rzeczywistości zachowanie płyty anizotropowej, uwzględniające pełne sprzężenia zginania ze skręcaniem, prowadzi do bardziej skomplikowanego sformułowania, dla którego rozwiązanie jest bardziej złożone. Prezentowane uproszczone rozwiązanie analityczne stanowi tylko punkt odniesienia w dyskusji dotyczącej dokładności dwóch różnych podejść numerycznych - jednego bazującego na modelu warstwowym, który wywodzi się z równań teorii płyt i powłok, oraz drugiego w pełni trójwymiarowego.

Dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej na wszystkich krawędziach (taki typ podparcia określany jest w literaturze jako *simply supported* albo oznaczany: *SSSS*), której ugięcie opisuje przybliżone równanie (1), rozwiązanie można przedstawić w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego Naviera:

$$w(x,y) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$
(2)

Ostatecznie ugięcie wzdłuż linii środkowych płyty (y = b/2 oraz x = a/2) przyjmując tylko pierwszy wyraz szeregu, dane jest:

$$w\left(x,\frac{b}{2}\right) \approx W_{11}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$
 (3)

$$w\left(\frac{a}{2},y\right) \approx W_{11}\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$
 (4)

gdzie W_{11} dla analizowanego przypadku $W_{11} \approx 6,755$ mm.

1.2 Układ warstw laminatu kompozytowego

Analizowany laminat kompozytowy składa się z 8 warstw, każda o grubości h = 1 mm. Układ warstw jest symetryczny względem płaszczyzny środkowej laminatu, a ich ułożenie zdefiniowane jest następująco:

$$[45^{\circ}/-45^{\circ}/45^{\circ}/-45^{\circ}]_s$$

Takie oznaczenie rozumiemy jako sekwencję kątów orientacji włókien jak przedstawiona na rysunku 2 (licząc od dolnej powierzchni płyty, k = 1, do górnej powierzchni, k = 8):



Rysunek 2: Schemat ułożenia kompozytu.

1.3 Zadania

- 1. Przeprowadzić analizę z uwzględnieniem dużych ugięć: Analysis Settings \rightarrow Large Deflections \rightarrow On w celu zbadania wpływu nieliniowości geometrycznej na wyniki.
- 2. Sprawdzić wpływ gęstości siatki na dokładność wyników.

2 Właściwości materiałowe

- 1. Zaczynamy od dodania ortotropowego modelu materiału Rysunek 3.
 - 1: PPM na Engineering Data \rightarrow Edit.
 - 2: Dodanie nowego materiału.
 - 3: Dodanie ortotropii do materiału.

1 Image: Construction of the second	1.						
Project 🥏 A2:Engineering Data 🗙							
Engineering Data Sources							
✓ ₽ X Outline of Schematic A2: Er	gineering Data						
	A	E	зС	D			
1	Contents of Engineering Data	A () 🔞	Source			
2 = Material							
3	tural Steal		-	😅 Ger	Fatigue Data al		
al Data * Click here t	Cirk here to add a new material						
ening							
🔥 Unsaved Project - Workbench							
File View Tools Units Extensions	Jobs Help						
🎦 💕 🛃 🔣 📑 Project 🦪 A2	Engineering Data 🗙						
🍸 Filter Engineering Data 🎬 Engineering Da	a Sources						
Toolbox - 4 x	Outline of Schematic A2: Engineering Data						
Physical Properties	A				В		
Linear Elastic	Contents of Engineering Data				E 🗿		
🖓 Isotropic Elastidty	De Material						
Orthotropic Elastidty	3 Structural Steel						
Anisotropic Elastidy							
Hyperelastic Experimental Data	4 ? W UD composite				<u> </u>		
Chabacha Test Data	Click here to add a new material						

Rysunek 3: Dodanie ortotropowego materiału.

2. Dodanie właściwości materiałowych - Rysunek 4.

🔥 Unsaved Project - Workbench						_				
File Edit View Tools Units Exten	isions Ja	obs Help								
🎦 📴 🛃 🔣 🗍 Project 🦪 A2:	Engineerir	g Data 🗙								
Y Filter Engineering Data 🏭 Engineering Dat	a Sources									
Toolbox 👻 🗭 🗙	Outline	of Schematic A2: Engineering Data							- F	ч×
Field Variables		A		в	с	D		E		
M Temperature	1	Contents of Engineering Data	<u>_</u>	0	8	Source		Description		
Frequency	2	Material			_					
22 Shear Angle	3	Structural Steel		F	m	Cer Ger	Fatigue Data at zero mean stress co	mes from 1998 ASME BPV Code	, Section 8,	Div
Create Field Variable	-	0	_	_	-		2, Table 5-110.1			
Physical Properties	4	W UD composite	_	_						
Linear Elastic	-	Click here to add a new material								
Isotropic Elastidty										
Anisotropic Elastidy										
Hyperelastic Experimental Data										
Chaboche Test Data										
E Plasticity										
Bilinear Isotropic Hardening Multilinear Isotropic Hardening Bilinear Kinematic Hardening Multilinear Kinematic Hardening Achaboche Kinematic Hardening										
Anand Viscoplastidty	Properti	es of Outline Row 4: UD composite								×
🚰 Gurson Model		A					В	С	D	E
	1	Property					Value	Unit	8	GΖ
E Life	2	Material Field Variables					III Table			
E Strength	3	E 2 Orthotropic Elasticity								
⊞ Gasket	4	Young's Modulus X direction					1,4E+05	MPa	-	
Viscoelastic Test Data	5	Young's Modulus Y direction					10000	MPa	-	
☑ Viscoelastic	6	Young's Modulus Z direction					10000	MPa	-	
Shape Memory Alloy	7	Poisson's Ratio XY					0,3			
Geomechanical	8	Poisson s kato 12					0,4			믈
🗄 Damage	9	Possuris Raduo Az					5000	10-		
Damage Initiation Criteria	10	Shear Modulus X1					3500	MDs		븜
Damage Evolution Law	12	Shear Modulus X7				-	5000	MPa		븕
E Concerve Zone								,·	_	

Rysunek 4: Właściwości materiałowe kompozytu.

3 Model Warstwowy

3.1 Geometria i ułożenie kompozytu.

1. Geometrią modelu jest płyta o wymiarach 600×400 mm w płaszczyźnie *XY*. Uwaga: we właściwościach podajemy grubość jako 8 mm.





Rysunek 5: Geometria modelu warstwowego.

- 2. Dodanie układu współrzędnych związanego z modelem Rysunek 6.
 - 1: PPM na Coordinate Systems \rightarrow Insert \rightarrow Coordinate System.
 - 2: Dla wygody można zmienić nazwę nowo dodanego układu.
 - 3: W definicji miejsca zaczepiena nowego układu należy wskazać cały model.



Rysunek 6: Dodanie układu współrzędnych.

- 3. Dodanie warstw kompozytu Rysunek 7.
 - 1: PPM na Geometry \rightarrow Insert \rightarrow Layered Section.
 - 2: Jako układ odniesienia wskazujemy układ współrzędnych z poprzedniego kroku. *Offset Middle*. Następnie klikamy na *Layers* → *Worksheet*.
 - 3: Dodajemy 8 warstw. W tym przypadku nie ma znaczenia, czy zaczniemy je dodawać jako (+Z) czy (-Z).

Outline 4				
Filter: Name	Geometry			
	16.05.2025 20:28	4		
Deviant				
- Model (A4)	The second secon	1 **		
Geome				
Insert	Element Orientation			
Export	Point Mass			
	Surface Coating			
alto Rename (F2)	Thickness			
Mesh 🚯 Update Geometry from Source	Layered Section			
E Stati Recet Packy Colore				
🔁 👔 Update Geometry From Results File(BETA)				
Solution Information	-			
	-			
Details of "Layered Section"				
E Scope				
Scoping Method Geometry Selection		2		
Geometry 1 Body				
Definition				
Coordinate System element				
Offset lype Middle				
Layers Worksneet	Worksheet			
Suppressed No				
Nonlinear Effects Ves				
Thermal Strain Effects Ves				
Graphics Properties	-1			
Laver To Display All Lavers	Geometry Print Previe			
Properties	Graphics Annotations			
Total Thickness 0, mm	Type Value			
Total Mass 0, kg				
Manage Views	×			
Lavered Section				
Right click on the grid to add, modify and delete a row.		2		
		5.		
Layer 1 is on the bottom. Subsequent layers are added to the top, inc	reasing in the +2 normal direction.			
	Layer	Material	Thickness (mm)	Angle (°)
	(+Z)			
	(-Z) Add Layer			
	Import Layers (Beta)		

Rysunek 7: Dodanie warstw kompozytu.

4. Ułożenie kompozytu zgodnie z zadaniem.

Layer	Material	Thickness (mm)	Angle (°)
(+Z)			
8	UD composite	1	45
7	UD composite	1	-45
6	UD composite	1	45
5	UD composite	1	-45
4	UD composite	1	-45
3	UD composite	1	45
2	UD composite	1	-45
1	UD composite	1	45
(-Z)			

Rysunek 8: Wprowadzenie ułożenia kompozytu.

3.2 Model MES

- 1. Siatka elementów skończonych Rysunek 9.
 - 1: Globalne ustawienia siatki.
 - 2: Body Sizing dla całej płyty.
 - 3: Gotowa siatka.



Rysunek 9: Siatka elementów.

- 2. Warunki brzegowe płyta jest podparta w sposób statycznie wyznaczalny Rysunek 10.
 - A: 4 krawędzie (wszystkie) przemieszczenie na kierunku Z = 0, reszta Free.
 - B: 1 krawędź (wzdłuż osi X) przemieszczenie na kierunku Y = 0, reszta Free.
 - C: 1 krawędź (wzdłuż osi Y) przemieszczenie na kierunku X = 0, reszta Free.
 - **D**: ciśnienie 0.1 MPa działające na kierunku *Z*.



Rysunek 10: Warunki brzegowe.

3.3 Wyniki analizy.

1. W modelu warstwowym wyniki wyświetlane są dla konkretnej warstwy. Warstwę można zmienić w elemencie *Scope* każdego z wyników - Rysunek 11.



Rysunek 11: Naprężenia na kierunku x w pierwszej warstwie.

- 2. Przygotowanie ścieżek wzdłuż linii środkowych płyty Rysunek 12.
 - 1: Dodanie ścieżki: PPM na *Model* → *Insert* → *Construction Geometry*. Następnie dodajemy dwukrotnie *Path*. Ścieżki zostaną określone przy pomocy współrzędnych początku i końca.
 - 2: Definicja ścieżki na kierunku *x*.
 - 3: Definicja ścieżki na kierunku y.



Rysunek 12: Przygotowanie ścieżek.

• Schemat obu ścieżek - Rysunek 13.





- 3. Wyniki prezentowane na ścieżkach to ugięcie w, czyli deformacja na kierunku Z.
 - Ugięcie wzdłuż ścieżki x w_x .





• Ugięcie wzdłuż ścieżki y - w_y .



Rysunek 15: Ugięcie w_y .

4 Model 3D

4.1 Geometria

1. Przed rozpoczęciem pracy nad trójwymiarową geometrią łączymy elementy danych materiałowych pomiędzy modelami.

Project Scł	hema	tic								
				_						_
-		A				•		В		
1		Static Structural				1	-	Static Structural		
2	9	Engineering Data	\checkmark	4	-	2	٢	Engineering Data	\checkmark	4
3	নী	Geometry	✓ .	4		3	\bigcirc	Geometry	?	4
4		Model	✓ .	4		4	@	Model	7	4
5		Setup	✓ .	4		5		Setup	7	4
6		Solution	<	4		6		Solution	7	4
7	1	Results	 Image: A second s	4		7	1	Results	7	4
		shell						3D		

Rysunek 16: Połączenie właściwości materiałowych.

2. Przygotowanie geometrii zaczynamy od narysowania jednej warstwy kompozytu, czyli prostokąta o wymiarach 400×1 mm w płaszczyźnieXZ.



Rysunek 17: Szkic pojedynczej warstwy w płaszczyźnie XZ.

- 3. Powielenie warstwy Rysunek 18.
 - 1: Zaznaczamy opcję *Linear Pattern*.
 - 2: Wybieramy prostokąt z poprzedniego punktu.
 - **3**: Jako kierunek zaznaczamy oś *Z*.
 - 4: Odpowiednio wypełniamy *Pattern Type*.
 - 5: Na koniec zatwierdzamy operację.



Rysunek 18: Powielenie warstwy.

- 4. Skutkiem poprzedniej operacji jest przeniesienie nowych powierzchni do oddzielnych komponentów, co należy naprawić Rysunek 19.
 - 1: W pierwszym kroku należy zaznaczyć z listy wszystkie powierzchnie (*Surface*), następnie PPM na którąkolwiek \rightarrow Move to New Component.
 - 2: Wszystkie 8 powierzchni musi znajdować się w jednym komponencie. Pozostałości z poprzedniego kroku należy usunąć.
 - 3: Ostatecznie lista powinna wyglądać w taki sposób.



Rysunek 19: Uprzątnięcie struktury modelu.

- 5. Wyciągnięcie warstw Rysunek 20.
 - 1: Zaznaczenie wszystkich powierzchni.
 - 2: Uwaga: należy zaznaczyć opcję No merge.
 - **3**: Jako kierunek wyciągnięcia zaznaczamy oś *X*. Następnie wyciągamy wszystkie powierzchnie na 600 mm.



Rysunek 20: Wyciągnięcie powierzchni.

• Ostatecznie model powinien wyglądać jak na rysunku 21 i mieć w drzewie struktury jeden komponent z 8 elemetami *Solid*.



Rysunek 21: Gotowy model 3D.

4.2 Przypisanie ułożenia.

- 1. Dodanie układów współrzędnych Rysunek 22.
 - 1: Dodajemy dwa nowe układy współrzędnych.
 - 2: Jako ich punkt odniesienia możemy zaznaczyć górną powierzchnię całego materiału (w wypadku tego zadania współrzędnia *Z* układów nie ma znaczenia).
 - 3: Po wprowadzeniu obu układów należy je obrócić względem osi Z odpowiednio o $+45^{\circ}$ i -45° . Uwaga: dla lepszej orientacji w kolejnych punktach warto zmienić nazwy układów.



Rysunek 22: Dodanie układów współrzędnych.

- 2. Grupowanie warstw.
 - W celu ułatwienia zarządzania i przypisywania właściwości poszczególnym warstwom można je pogrupować. W tym celu: zaznaczamy konkretne elementy z *Geometry*, następnie PPM na jedną z nich \rightarrow *Group*. W ten sposób dzielimy elementy na dwie grupy ze względu na ich ułożenie: +45 i -45.



Rysunek 23: Grupowanie odpowiednich warstw.

 Warstwom z poszczególnych grup przypisujemy właściowści - model materiału oraz odpowiedni układ współrzędnych: 1 - warstwy +45°, 2 - warstwy -45°.



Rysunek 24: Wprowadzenie parametrów warstw kompozytu.

4.3 Model MES.

- 1. Ustawienia siatki Rysunek 25.
 - 1: Globalne ustawienia siatki.
 - 2: Body Sizing dla wszystkich 8 warstw.

Details of "Mesh" P Display Display Style Defaults Scope Physics Preference Mechanical Element Order Quadratic Element Size Default String Scope String Scoping Method Geometry Selection Scoping Method Segmetry 8 Bodies Defaults Definition Suppose Suppose Element Size Default String String	,		ody Sizing : Structural (BS) inalysis Settings iolution (B6) Solution Information		2	Hesh - - - - - - - - - - - - -	Body Sizing ic Structural (B5) Analysis Settings Solution (B6) \$
Display Use Geometry Setting Display Style Use Geometry Setting Defaults Geometry Physics Preference Mechanical Element Order Quadratic Element Size Default String Filterent Size String Element Size	De	tails of "Mesh"		4	De	tails of "Body Sizir	ng" - Sizing 4
Display Style Use Geometry Setting Defaults Geometry Physics Preference Mechanical Element Order Quadratic Element Size Default Strip Element Size Strip Element Size		Display			=	Scope	
Defaults Geometry 8 Bodies Physics Preference Mechanical Definition Element Order Quadratic Suppressed No Signa Element Size 25, mm	ľ	Display Style	Use Geometry Setting			Scoping Method	Geometry Selection
Physics Preference Mechanical Element Order Quadratic Element Size Definition Sizion Element Size Sizion Element Size		Defaults				Geometry	8 Bodies
Element Order Quadratic Element Size Default Siring Element Size Siring	Π	Physics Preference	Mechanical	F	=	Definition	
Element Size Default Type Element Size String Element Size 25, mm		Element Order	Quadratic			Suppressed	No
Element Size 25, mm		Element Size	Default			Туре	Element Size
	÷	Sizing	,			Element Size	25, mm
Quality Advanced		Quality				Advanced	
Inflation Defeature Size Default	+					Defeature Size	Default
Advanced Behavior Soft	+	Inflation					
Statistics	+ + +	Advanced			L	Behavior	Soft

Rysunek 25: Ustawienia sitaki w modelu 3D.

- 2. Automatycznie wygenerowane kontakty mogą mieć zbyt duży "zasięg", co często skutkuje związaniem warstw, które nie przylegają do siebie. W tym celu należy zmienić ustawienia kontaktu -Rysunek 26.
 - 1: Zaczynamy od usunięcia wszystkich kontaktów wygenerowanych automatycznie.
 - 2: W ustawieniach *Contacts* zmieniamy ustawienia automatycznego wykrywania kontaktu.
 - 3: Generujemy nowe kontakty.
 - **4**: Sanity check: program powinien wygenerować 8 stref kontaktu (po jednym pomiędzy kolejnymi warstwami). Wszystkim zmieniamy ustawienia według rysunku.

Rysunek 26: Modyfikacja kontaktu między warstwami.

- 3. Warunki brzegowe są identyczne do tych wprowadzonych w zadaniu warstwowym, z tą różnicą, że będziemy przykładać je do **dolnych** krawędzi Rysunek 27.
 - A: 4 dolne krawędzie przemieszczenie na kierunku Z = 0, reszta *Free*.
 - B: 1 dolna krawędź (wzdłuż osi X) przemieszczenie na kierunku Y = 0, reszta Free.
 - C: 1 dolna krawędź (wzdłuż osi Y) przemieszczenie na kierunku X = 0, reszta Free.
 - **D**: ciśnienie 0.1 MPa działające na kierunku *Z* przyłożone do **górnej** powierzchni.

Rysunek 27: Warunki brzegowe w zadaniu 3D.

4.4 Wyniki analizy 3D.

1. Podobnie jak w zadaniu warstwowym istnieje możliwość prezentowania wyników w konkretnej warstwie, z tą różnicą, że aby uzyskać taki obraz należy najpierw w *Scope: Geometry* zaznaczyć konkretną warstwę.

Rysunek 28: Naprężenia na kierunku X w górnej warstwie.

- 2. Przygotowanie ścieżek wzdłuż linii środkowych płyty Rysunek 29.
 - 1: Podobnie do poprzedniego zadania definiujemy dwie ścieżki wzdłuż linii środkowych płyty przy pomocy dwóch punktów: początku i końca.
 - 2: Różnicą w zadaniu 3D jest to, że należy jako współrzędna z podać środek płyty.

• Ugięcie w_x .

Rysunek 30: Ugięcie w_x w zadaniu 3D.